Проблемы физики, математики и техники, № 2 (11), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ЗАМЕТКА О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев[1], Т.И. Васильева[2], А.В. Сыроквашин[3]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*
[3]*Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск*

A NOTE ON INTERSECTIONS OF SOME MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

A.F. Vasilyev[1], T.I. Vasilyeva[2], A.V. Syrokvashin[3]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*
[3]*I.G. Petrovsky Bryansk State University, Bryansk, Russia*

В работе результаты В.С. Монахова о том, что для любой разрешимой ненильпотентной конечной группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ (подгруппа $\Delta(G)$) совпадает с пересечением всех максимальных (соответственно всех абнормальных максимальных) подгрупп M группы G таких, что $MF(G) = G$, распространены на произвольные конечные группы.

***Ключевые слова**: конечная группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фраттини, θ-подгруппа Фраттини, подгрупповой т-функтор.*

In the work V.S.Monahov's results that for any soluble non-nilpotent finite group G its Frattini subgroup $\Phi(G)$ (subgroup ΔG)) coincides with intersection of all maximal (respectively all abnormal maximal) subgroups M of group G such that $MF(G) = G$, are extended on arbitrary finite groups.

***Keywords**: finite group, maximal subgroup, Frattini subgroup, Frattini θ-subgroup, subgroup m-functor.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В 1885 году Фраттини в [1] впервые исследовал подгруппу, равную пересечению всех максимальных подгрупп конечной группы, которая сейчас называется подгруппой Фраттини и обозначается $\Phi(G)$. В 1953 году Гашюц [2] изучил свойства подгруппы $\Delta(G)$, которая определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, если группа ненильпотентна, и как G, если она нильпотентна.

В работах [3], [4] В.С. Монахов показал, что для любой разрешимой ненильпотентной группы G подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ (подгруппа $\Delta(G)$) совпадает с пересечением всех максимальных (соответственно всех абнормальных максимальных) подгрупп M группы G таких, что $MF(G) = G$.

Возникает задача: распространить результаты В.С. Монахова на произвольные группы. Решению этой задачи с использованием функторного метода, разработанного в монографии [5], и посвящена настоящая работа.

1 Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [6], [7]. Пусть G – группа. Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = \cap\{M \mid M$ – максимальная подгруппа группы $G\}$ и $\Phi(G) = 1$, если $G = 1$. Если G ненильпотентна, то подгруппа $\Delta(G) = \cap\{M \mid M$ – абнормальная максимальная подгруппа группы $G\}$, если G нильпотентна, то $\Delta(G) = G$.

Через $Z(G)$ обозначается центр G. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ – наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G; $F^*(G)$ – наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа группы G. Напомним [6], что подгруппа $\tilde{F}(G)$ определяется следующими условиями:

1) $\tilde{F}(G) \supseteq \Phi(G)$;

2) $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ – цоколь группы $G/\Phi(G)$.

Согласно [5, с. 13] отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором, если $\theta(G)^{\alpha} = \theta(G^{\alpha})$ для любого изоморфизма α группы G.

Подгрупповой функтор θ называется:

1) эпиморфным, если $(\theta(A))^{\varphi} \subseteq \theta(B)$ для любого эпиморфизма

$$\varphi: A \to B,$$

где A и B – группы;

2) m-функтором, если в каждой группе G множество $\theta(G)$ содержит G и некоторые ее максимальные подгруппы;

3) абнормально полным [8], если θ является m-функтором и $\theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G.

Пусть θ – подгрупповой m-функтор. Для группы G через $\Phi_\theta(G)$ обозначается пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$ и $\Phi_\theta(G)$ называется θ-подгруппой Фраттини [5, с. 198].

Если подгрупповой m-функтор θ является абнормально полным, то $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G)$. В случае, когда в группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее максимальных подгрупп, $\Phi(G) = \Phi_\theta(G)$. Если в группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее абнормальных максимальных подгрупп, то $\Phi_\theta(G) = \Delta(G)$.

***Теорема* 1.1 [6].** *Для любой группы G подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна и $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$.*

***Теорема* 1.2 [6].** *Для любой группы G выполняется $C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$.*

Идея доказательства следующего результата предложена Л.А. Шеметковым.

***Лемма* 1.3.** *Для любой группы G выполняется $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то для $G/\Phi(G)$ утверждение справедливо. Из $F^*(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(G/\Phi(G))$ и $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$ заключаем, что $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть $\Phi(G) = 1$. По определению $\tilde{F}(G) = \mathrm{Soc}(G)$. По 13.14.X из [9] $F^*(G) = E(G)F(G)$. Заметим, что $\Phi(E(G)) = 1$. Так как по следствию 13.7.X из [9] $E(G)/Z(E(G))$ – прямое произведение простых неабелевых групп, $Z(E(G)) = F(E(G))$. Отсюда и из (c) теоремы 10.6.A из [7] заключаем, что $E(G) = HZ(E(G))$, где H – дополнение к $Z(E(G))$ в $E(G)$. Тогда H – прямое произведение простых неабелевых групп. Из того, что H – характеристическая подгруппа в $E(G) \trianglelefteq G$, заключаем, что $H \trianglelefteq G$. Из леммы 4.14.A из [7] получаем, что $H \subseteq \mathrm{Soc}(G)$. Отсюда и из $Z(E(G)) \subseteq F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ следует, что $E(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Тогда $F^*(G) = E(G)F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Получили противоречие с выбором G. Лемма доказана.

***Лемма* 1.4.** *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда существует абнормальная максимальная подгруппа M группы G такая, что $M\tilde{F}(G) = G$.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда любая максимальная подгруппа M группы G такая, что $M\tilde{F}(G) = G$, нормальна в G.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $|G/\Phi(G)| < |G|$, в $G/\Phi(G)$ найдется абнормальная максимальная подгруппа $M/\Phi(G)$, для которой $M/\Phi(G)\ \tilde{F}(G/\Phi(G)) = G/\Phi(G)$. Заметим, что M – абнормальная максимальная подгруппа G и

$$\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \tilde{F}(G/\Phi(G)).$$

Поэтому $M\tilde{F}(G) = G$. Получили противоречие с выбором G.

Будем считать, что $\Phi(G) = 1$. Тогда подгруппа $\tilde{F}(G) = \mathrm{Soc}(G)$.

Пусть $\tilde{F}(G)$ – ненильпотентная группа. В $\tilde{F}(G)$ найдется ненормальная силовская подгруппа S. Пусть P – силовская подгруппа группы G такая, что $P \cap \tilde{F}(G) = S$. Для любого $x \in N_G(P)$ выполняется

$$S^x = P^x \cap \tilde{F}(G)^x = P \cap \tilde{F}(G) = S.$$

Поэтому $N_G(P) \subseteq N_G(S) \subseteq M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Отсюда и из леммы Фраттини заключаем, что $G = N_G(S)\tilde{F}(G) = M\tilde{F}(G)$. Ввиду леммы 17.2 из [6] M – абнормальная подгруппа в G. Получили противоречие с выбором G.

Пусть подгруппа $\tilde{F}(G)$ нильпотентна. Тогда $\tilde{F}(G) = F(G) = N_1 \times \ldots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1, \ldots, t$. Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Так как $\Phi(G) = 1$, то для N_i найдется максимальная подгруппа M_i группы G такая, что $M_iN_i = G$. Заметим, что $M_i\tilde{F}(G) = G$. Согласно выбора группы G получаем, что $M_i \lhd G$. Так как N_i абелева, то $N_i \subseteq C_G(N_i)$. Из $M_i \cap N_i = 1$ и $M_i \lhd G$ следует, что $M_i \subseteq C_G(N_i)$. Но тогда $G = M_iN_i \subseteq C_G(N_i)$. Отсюда и из теоремы 1.2 заключаем, что $G \subseteq C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$. Следовательно, G нильпотентна. Получили противоречие с выбором G. Лемма доказана.

2 Основной результат

Теорема. *Пусть θ – эпиморфный m-функтор, который является абнормально полным. Тогда θ-подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с пересечением всех подгрупп M таких, что $M \in \theta(G)$ и $M\tilde{F}(G) = G$.*

Доказательство. Если G нильпотентна, то утверждение теоремы выполняется.

Для ненильпотентной группы G обозначим через Φ_1 пересечение всех подгрупп M группы G таких, что $M \in \theta(G)$ и $M\tilde{F}(G) = G$, через Φ_2 пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$ группы G, которые содержат $\tilde{F}(G)$. Ясно, что θ-подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G) = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Из леммы 1.4 следует, что $\Phi_1 \neq G$.

Предположим, что существуют группы G, для которых $\Phi_1 \neq \Phi_\theta(G)$. Выберем группу G наименьшего порядка с этим свойством.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Заметим, что $G/\Phi(G)$ ненильпотентна и $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$. Так как $|G/\Phi(G)| < |G|$, для $G/\Phi(G)$ утверждение теоремы выполняется. Поскольку θ – эпиморфный m-функтор, $\Phi_\theta(G)/\Phi(G) = \Phi_\theta(G/\Phi(G))$ и $\Phi_1/\Phi(G)$ есть пересечение всех подгрупп $M/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$ таких, что $M/\Phi(G) \in \theta(G/\Phi(G))$ и $M/\Phi(G)\tilde{F}(G/\Phi(G)) = G/\Phi(G)$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_\theta(G)$. Это противоречит выбору G.

Пусть $\Phi(G) = 1$. В этом случае

$$\tilde{F}(G) = \mathrm{Soc}(G) = N_1 \times \ldots \times N_t,$$

где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, \ldots, t$. Ввиду теоремы 1.1 подгруппа $\Delta(G) = Z(G)$.

Выберем в $\Phi_1/\Phi_\theta(G)$ минимальную нормальную подгруппу $R/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $R/\Phi_\theta(G)$ абелева. Так как m-функтор θ является абнормально полным, $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G) = Z(G)$. Тогда $\Phi_\theta(G) \subseteq Z(R)$ и R нильпотентна. Поэтому $R \subseteq F(G)$. Отсюда и из $F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ заключаем, что $R \subseteq \Phi_2$. Значит, $R \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_\theta(G)$, что противоречит выбору подгруппы $R/\Phi_\theta(G)$.

2. Пусть $R/\Phi_\theta(G)$ – неабелева группа. Так как $R/\Phi_\theta(G)$ является минимальной нормальной подгруппой $G/\Phi_\theta(G)$, то

$$R/\Phi_\theta(G) = A_1/\Phi_\theta(G) \times \ldots \times A_t/\Phi_\theta(G),$$

где $A_i/\Phi_\theta(G)$ – неабелева простая группа для $i = 1, \ldots, t$ и $A_i/\Phi_\theta(G) \simeq A_j/\Phi_\theta(G)$ для любых $i, j = 1,\ldots, t$. Следовательно, $R/\Phi_\theta(G)$ – полупростая группа. Подгруппа $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G) = Z(G)$. Тогда по теореме 13.6.X из [9] $R \subseteq F^*(G)$. Ввиду леммы 1.3 $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Следовательно, $R \subseteq \Phi_2$. Поэтому $R \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_\theta(G)$. Получили противоречие с выбором группы $R/\Phi_\theta(G)$. Теорема доказана.

Заключение

Если θ – такой регулярный m-функтор, что в каждой группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее максимальных подгрупп, то из теоремы получается

***Следствие* 1.** *Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ неединичной группы G совпадает с пересечением всех ее максимальных подгрупп M таких, что $M\tilde{F}(G) = G$.*

В случае, когда θ – такой регулярный m-функтор, что в каждой группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее абнормальных максимальных подгрупп, из теоремы вытекает

***Следствие* 2.** *Подгруппа $\Delta(G)$ ненильпотентной группы G совпадает с пересечением всех ее абнормальных максимальных подгрупп M таких, что $M\tilde{F}(G) = G$.*

Следующий пример показывает, что в теореме нельзя заменить $\tilde{F}(G)$ на квазинильпотентный радикал $F^*(G)$.

Пример. Пусть $G \simeq A_5$ – знакопеременная группа степени 5, K – поле, состоящее из трех элементов. Обозначим через $A = A_K(G)$ фраттиниевый KG-модуль (см. [10]). Ввиду [10] A – неприводимый KG-модуль размерности 4. По известной теореме Гашюца существует фраттиниево расширение $A \rightarrow E \rightarrow G$ такое, что $A \underset{G}{\cong} \Phi(E)$ и $E/\Phi(E) \cong G$. Из свойств модуля A следует, что группа E не является квазинильпотентной. Заметим, что $F^*(E) = \Phi(E)$. Ясно, что в группе E не существует максимальных подгрупп M таких, что $MF^*(E) = E$. Заметим, что $\Delta(E)= \Phi(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini, G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Gaschütz, W.* Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. *Монахов, В.С.* Замечание о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

4. *Монахов, В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.

5. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

6. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

8. *Селькин, М.В.* О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. – 2009. – № 8 (74). – С. 67–76.

9. *Huppert, B.* Finite group. III. / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1982. – 458 p.

10. *Griss, R.* The Frattini module / R. Griss, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 256–266.

Поступила в редакцию 06.02.12.